

• X •

幾個數學語言錯誤的例子

——評陳明哲編著「或然率」

• 高 全 之 •

中央數學叢書之一

民國61年5月13版

中央書局發行

一

本文題目裏所謂「數學語言」，泛指數學論述裏的遣詞用字。它與我們日常用語不盡相同，因為它必須具有以下幾項性質：

- 1 數學語言必須準確，避免語意含混的句子。
- 2 數學語言必須周密，提供條件必須完整。
- 3 數學語言必須精省，蕪詞蔓字可省就省。

讓我們就這本厚僅91頁，銷行13版的「或然率」；逐次審視這三項性質。書前「編輯大意」裏自陳其特色之二為：「(一)本書專供高中學生升學，複習，會考及課外補習之用。……(二)編輯本書之目的均在幫助讀者解決困難問題，更要對讀者在校上課時所發生疑問提供解答。在家時又可無師自通也。」，所以本文意見提供給高中同學們，以及高中數學參考書編著先生們做為參考。

二

如前所述，我們將不把注意力放在校對疏忽而發生的錯誤上——此

等錯誤有時亦能引起誤會，比如以下這些例子：

①14頁13行

原文： $\cdots P_n \geq P_{r-1}$

更正： $\cdots P_r \geq P_{r-1}$

②14頁14行

原文： $\cdots P_r \geq P_{r-1}$

更正： $\cdots P_r \geq P_{r-1}$

③16頁13行

原文： $\cdots n$ 個同坐於 $\cdots$

更正： $\cdots n$ 個人同坐於 $\cdots$

④20頁20行

原文： $\cdots$ 今假設 m 次 $\cdots$

更正： $\cdots$ 今假設 n 次 $\cdots$

⑤24頁1行

原文： $\cdots$ 第三回 $\cdots$

更正： $\cdots$ 第二回 $\cdots$

⑥65頁1行

原文： $\cdots \frac{32}{63}, \frac{4}{63}, \frac{1}{63}$

更正： $\cdots \frac{23}{64}, \frac{4}{64}, \frac{1}{64}$

⑦76頁5行

原文： $50 \times \frac{3}{100} \cdots$

更正： $50 \times \frac{30}{100} \cdots$

⑧79頁14行

原文： $1 \cdot \frac{2}{n(n+3)} + \cdots$

更正： $1 \cdot \frac{2}{n(n+1)} + \cdots$

⑨34頁1行

• XII •

原文： 三人可及格…

更正： 三人皆及格…

⑩24頁10行

原文： …進取兩回…

更正： …連取兩回…

⑪12頁19行

原文： …則其或然

更正： …則其機

⑫6頁16行

原文： (1) $\frac{{}^1_7C_2}{{}^{12}_2C_2} = \frac{7}{22}$

更正： $\frac{{}_7C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{7}{22}$

以上這些例子真是舉不勝舉。其中如第⑨⑩諸項，其實可能是犯了觀念不清楚的毛病。這種錯誤在13版次的書裏大量出現，使我們十分訝異。

三

現在我們用幾個例子，來說明數學語言的重要性。

先原文照抄這個例題（原書第4頁）的第一個部份：

〔例2〕袋中藏有球16個，其中白球7個，黑球6個，紅球3個。
試求下列各題：

(1)若取出一球為白球或為黑球或為紅球之或然（筆者按：這裏漏一「率」字）為何？

〔解〕(1)從袋內16個球中取出一個之方法有 ${}_{16}C_1$ 種。

從7個白球中取出一個白球之方法有 ${}_7C_1$ 種。

故取出一球為白球之或然率為 $\frac{{}_7C_1}{{}_{16}C_1} = \frac{7}{16}$

同理，取出一球為黑球之或然率為 $\frac{{}_6C_1}{{}_{16}C_1} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

同理，取同一球為紅球之或然率為 $\frac{{}_3C_1}{{}_{16}C_1} = \frac{3}{16}$

我們注意到，題目裏用的是， p 或 q 或 t 型式的複合語句（簡稱複句，compound statement），它為真（true）的條件是 p q t 三個單句裏有一為真即可。所以這個題目的答案應該是三項或然率相加，即 $\frac{7}{16} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{16}{16} = 1$ 。或然率等於 1 意味這個事件必然會發生。事實上袋子裏 16 個球除了白、黑、紅三種顏色以外確無其它顏色，所以取出一球必然是三種顏色居其一。那麼這個題目可以不經過分別演算然後相加才得到答案，它可以直接由或然率的定義來判斷答案是 1。

這是不是原題的用意呢？我想不是的。題目的原意可能是要我們分別求得①取出一球為白球的或然率②取出一球為黑球的或然率以及③取出一球為紅球的或然率。因此原書的答案才會這樣顯得有頭無尾，突然中斷。如果我的猜想不錯的話，這個題目寫得就很含混。它犯了基本邏輯知識的戒條。所以我們曾說：數學語言必須準確。如果我的猜想錯了，則原書的解答不够完整，它犯了不了解題意的毛病。

再看一個例子（原書第 6 頁）：

類似習題：

(4) 從英文字 *factor* 和 *banter* 諸字母中，各隨意出一個字母，問所取為兩個字同有的字母，其或然率是甚麼？

略解：

(4) 這兩個英文（筆者按：原書漏此「文」字）字母，每個字均有 6 個字母，其中 a, t, r 三個字母是兩個字（筆者按：原書誤排「子」）所同有的。從這兩個字每次各取出一個字母之法有 $6^2 = 36$ 種。取出兩個字是相同的，只有 3 種，故所求的或然率為 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

我們很快可以看出：答非所問。原來題意問所取為兩字共有的字母，即取出為 (a, a) (a, t) (a, r) (t, a) (t, t) (t, r) (r, a) (r, t) (r, r) 等 9 種情形的或然率。答案應為 $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ （即 $\frac{{}_3C_1}{{}_6C_1} \times \frac{{}_3C_1}{{}_6C_1}$ ）。原書解答只考慮到 9 種中的 3 種，這三種不僅是兩個字所共有的字母，也是兩兩相同的字母。如果我們出題目時候把「兩個字同有的字母」改寫成「兩個字共有的字母」或「兩個字皆有的字母」，是不是可以免除這種誤會呢？數學語言含混，真是很要命的事。

再看一個簡單的例子（原書第27頁）：

類似問題：

(5)一骰子擲二次，求其第一次出現一點之或然率。

略解：

$$\begin{aligned} & (5) \text{第一次出一點之或然率爲 } \frac{1}{6}, \text{第二次不出一點的或然率爲 } 1 - \frac{1}{6} \\ & = \frac{5}{6}, \text{故所求之 } p = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

很明顯的，題目漏寫了「第二次不出一點」的條件。它應該寫成「一骰子擲二次，求其第一次出現一點且第二次不出現一點之或然率」，才「符合」原書的解答。因為我們不論擲多少次骰子，第一次出現一點的或然率始終是 $\frac{1}{6}$ 。如果原書題意要考我們這項觀念：「後續的獨立事件不影響前面發生了的事件的或然率」，則解答應該是 $\frac{1}{6}$ ，而不是 $\frac{5}{36}$ 。

• 所以如果原題題意要求 $\frac{5}{36}$ ，則項目出得不够周密，提供條件不够完整，如果原題題意要求 $\frac{1}{6}$ ，則原書的解答錯誤。我猜想這個錯誤的例子錯在題目提供的條件不够。

四

請讀者耐心再看兩個好玩的例子。第一個例子的題目（原書第60頁）和解答（原書第63頁）分別是這樣的：

綜合習題二

(1) 甲乙丙三人平時打靶，甲五發四中，乙四發三中，丙三發二中，今有一鳥飛近於三人射程之內，三人同時各發一槍，求此鳥至少中一點之或然率。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{5} \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \\ & \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

我們知道，該鳥至少中一點（其實說「中一彈」比較順口）的情形有三種：即①中三點，其或然率為 $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ ；②中兩點，其或然率為 $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} (1 - \frac{2}{3}) + \frac{4}{5} (1 - \frac{3}{4}) \cdot \frac{2}{3} + (1 - \frac{4}{5}) \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ ；③中一點，其或然率為 $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ 。因此，該鳥至少中一點的或然率以上三種或然率的和，三項相加，得到 $\frac{59}{60}$ 。原書解答只考慮了以上①②兩種情形。我想這種錯誤產生的原因可能有二：①原書原意要求得 $\frac{5}{6}$ ，但是題目出得辭不達意。這是數學語言不够準確的情形。②原書解答漏考慮了該鳥只中一點的情形。這是疏忽「至少」兩字涵意的情形。不論出自那一種原因，這種錯誤是很不應該的。

至於為什麼中一點，兩點，三點的或然率分別要如以上那樣計算，請讀者自己思考一下。至於三項或然率要相加的原因，是因為這題題目相同於我們在前文中討論過的，求「p 或 q 或 t」型式的複句的或然率的情形。即「至少中一點」相同於「中一點或二點或三點」，所以三項或然率要相加。

第二個例子在原書第53頁：

類似問題：

(2)甲乙二人競技，設兩人之技能相等。今在下列

(i)甲勝5回乙勝4回時，

(ii)甲勝5回乙勝3回時，

(iii)甲勝4回乙勝2回時，

諸情形時，甲獲全勝之或然率若何？但設最初勝6回時為全勝。

略解：

（筆者按，(i)(ii)兩部分的略解暫略掉）

(iii)前二情形為甲得勝一回，則全勝，因此乙在 (i) 二回，(ii) 三回不勝，即可。

(iii)之情形與 (i)，(ii) 之情形不同，因甲尚須得勝（筆者按：原書此處漏一「勝」字）兩回，故可分為下列二情形著想。

◦ XVI ◦

⑨甲連續勝二回時，其或然率爲 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

⑩甲一回勝，一回輸，以後再繼續比賽，結果甲全勝之時，其得勝或然率爲 $\frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$ 。因勝一回之或然率爲 $\frac{1}{2}$ ，以後之情形爲(ii)之情形，故尙勝一回之或然率爲 $\frac{7}{8}$ 。

⑪輸二回後，尙繼續比賽。若甲勝一回，則變爲(i)之情形，這時甲全勝之或然率爲 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ 。

因此，(a)，(b)及(c)之諸情形爲甲全勝之情形，故甲全勝之或然率爲

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{16}$$

現在我們自己來考慮甲勝4回乙勝2回以後，甲獲全勝（最先勝6回者爲全勝）的各種情形。

①甲勝，勝。此原書解答裏⑨的情形。

②甲勝，負；甲負，勝。此時比數皆爲甲勝5回，乙勝3回，所以變成了原題裏(ii)的情形。根據原書解答(ii)的結果，或然率爲 $\frac{7}{8}$ 。再考慮甲勝，負（或甲負，勝）的或然率爲 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ，所以甲勝，負（或甲負，勝）以後獲全勝的或然率爲 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$ 。又因爲這兩種情形（甲勝，負；以及甲負，勝）爲獨立事件，所以其或然率一共是 $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$ 。

讀者請留意原書解答⑩裏，漏考慮了甲勝一回以後再輸一回的或然率爲 $\frac{1}{2}$ 。這就是說，原書解答裏，「因勝一回之或率爲 $\frac{1}{2}$ ，以後之情形爲(ii)之情形」，這句話是錯的，應該改成「回勝一回之或然率爲 $\frac{1}{2}$ ，再輸一回之或然率爲 $\frac{1}{2}$ ，以後之情形爲(ii)之情形」。因此，原書⑩解裏，

「其得勝或然率為 $\frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$ 」，應改為「其得勝或然率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$ 」。

還有一點很重要。原書根本漏考慮了甲負，勝以後甲獲全勝這種情形。恰好這種情形的或然率也為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$ ，所以與「甲勝，負以後甲獲全勝」的或然率相加（我們已說過，它們互為獨立事件），恰好得到原書⑥解裏的 $\frac{1}{2} \times \frac{7}{8} (= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{8})$ 。

③甲負，負。此時此數為甲勝4回，乙勝4回。如果在下一回比賽裏甲勝，比數變成甲勝5回，乙勝4回，是原題裏(i)的情形。根據原書(i)解的結果，或然率為 $\frac{1}{4}$ 。再考慮甲負，負，勝的或然率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ，所以甲負，負，勝以後甲獲全勝的或然率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ 。

很明顯的原書③解裏漏以甲連負兩回的或然率 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ 去乘以後的 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ 了。

④甲負，負。與③同，此時比數為甲勝4回，乙勝4回。如果在下一回比賽裏甲再負，比數變成甲勝4回，乙勝5回。因此在以後的比賽裏，若要考慮甲獲全勝的或然率，必須假定甲連勝兩回。這種情形的或然率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^5$ 。

這種情形原書解答根本漏考慮了。

我們綜合考慮①②③④四種情形，而得或然率為

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

這個題目所需要考慮的情形較繁雜，原書解答錯得很厲害。

五

截至目前為止，我們討論了很多數學語句（Statement）的謬誤例子。現在我們要提幾個措詞上不得當的例子。把這些措詞與詞句合併起來，就是本文所泛指의數學語言（Language）。

一個最資討論的例子，在上面我們提到的原書第53頁例(2)的 (i) 與 (ii) 解裏。它們分別是這樣的：

(2) (i) 欲使乙全勝，則乙尚須勝二回。因此乙全勝之或然率爲 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，而乙全不勝之或然率即甲全勝之或然率爲 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 。

(ii) 欲使乙全勝，則乙尚須勝三回。因此乙全勝之或然率爲 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ，而乙全不勝之或然率即甲全勝之或然率爲 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ 。

上面這兩段解答裏，都有「乙全不勝」的說法。然而在 (i) 部分，這話的意思是「乙兩次裏有一次不勝」，在 (ii) 部分，這話的意思是「乙在三次裏有一次不勝」。因此，我們了解「乙全不勝」意思是「乙不全勝」，也就是說，「乙至少有一次不勝」。「乙全不勝」顯然是句錯話，它字面的意思似乎指「乙每次都不勝」，完全錯誤的傳達原意。

第36頁第4行以及第8行各有一句話，也是沒有寫清楚。其一爲「從其中取出三枚籤」，其二爲「由袋中取出一個」，分別應該改爲「從其中逐次取出三枚籤」，「由袋中逐次取出一個」。道理很簡單，少兩個「逐次」，意思完全不一樣，它可以是「一次取出二枚籤」，或「只取一次，取一個」的意思，而原書原意是一定要有「逐次」兩個字的。

第70頁第5行這個句子也現不穩：「至少兩個骰子出現四次2」。我們不妨改爲「兩個骰子至少出現四次2」。這樣子挑剔，似乎過份苛刻了。好，我們停止冗長的舉例。在下簡單的結語之前，再從雞蛋裏挑骨頭一次。我以為這本書提及 Bayes Formula，對於高中同學而言，似乎太過份了。這個公式似乎高中同學沒有研習的必要。

六

我們殷切希望在中文數學書裏能見到嚴謹的中文。這本書（請容我再驚恐的強調一遍，它已銷行了十三版），沒有能夠滿足我們的希望。在我個人的印象裏，它還不是一個最糟的例子。

這真是很糟的事情。